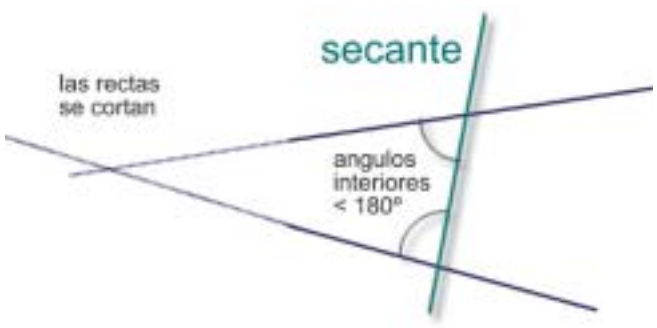
EL EXTRAÑO QUINTO AXIOMA

La pasada semana explicamos la ciclópea labor de Euclides al escribir sus *Elementos* y cómo en esta obra fue capaz de sentar las bases de la Geometría que aún hoy estudiamos en el colegio, sobre cinco principios básicos que él llamó postulados y que hoy llamamos axiomas. De estos cinco principios obvios que no necesitan demostración alguna, el *Quinto Postulado* es, en relación con los otros cuatro, muy complicado. En realidad, este axioma fue, 2.000 años después de que lo enunciara el geómetra de Alejandría, protagonista de la ruptura entre la Geometría de Euclides y la No-Euclídea. La respuesta llegó en el siglo XIX y te la contaremos la próxima semana.

por Lolita Brain

EL 'QUINTO POSTULADO' SEGÚN EUCLIDES

Euclides enunció su 'Quinto Postulado' del siguiente modo: "*Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos*". Este axioma no era ni tan sencillo como los otros cuatro ni satisfizo a Euclides, ni lo utilizó tanto. Por ejemplo, en las 28 primeras proposiciones de los *Elementos* no lo utilizó. Sin embargo, resulta intuitivo para todos, ya que viene a decir que existe una única recta paralela a otra que pase por un punto exterior. ¿Acaso nuestra intuición no nos dice eso? Pero el problema es que Euclides nos dice que sólo hay una paralela.

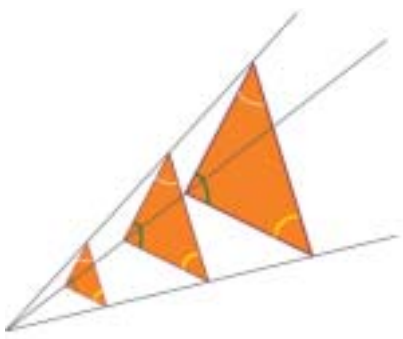


EQUIVALENTES ENUNCIADOS DEL 'QUINTO POSTULADO'

A lo largo de la historia se han proporcionado muchos enunciados que eran completamente equivalentes al *Quinto Postulado*, es decir, que si se acepta cualquiera de estos postulados se deduce el de Euclides y viceversa. Aquí tienes algunos.

1.- Una recta paralela a una dada dista de ella una longitud constante. **Proclo**

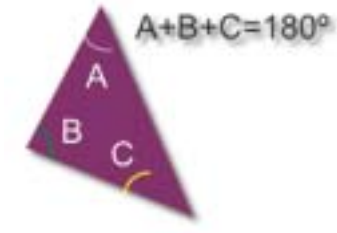
2.-Existen triángulos semejantes pero no iguales, es decir, triángulos con iguales ángulos pero lados proporcionales. **Wallis**



3.-Existe al menos un rectángulo, es decir, un cuadrilátero cuyos ángulos son rectos. **Saccheri**.

4.-Una recta perpendicular a un lado de un ángulo agudo también corta al otro lado. **Legendre**

5.-La suma de los tres ángulos de un triángulo suman 180º. **Legendre**



UNA LARGA Y APASIONANTE HISTORIA

La sospecha de que el Quinto Postulado no era tan evidente hizo que pronto despertara, en comentaristas de su obra y matemáticos, la idea de que, siendo verdadero, era deducible de los restantes cuatro axiomas. Dos cuestiones hacen complicado este axioma. Por un lado, que las rectas son extensibles infinitamente y que por tanto, si dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común. Nos resultará imposible saber si en su infinitud no llegan a tocarse en algún punto.

s. V Proclo

Fue el primer comentador de la obra de Euclides. En su obra '*Comentarios a Euclides*' proporciona la primera demostración errónea del 'Quinto Postulado'. Fue el primero en suponer que si dos rectas son paralelas mantienen su distancia constante.

s. X Gerberto

El que fuera papa Silvestre II creó uno de los primeros centros de enseñanza occidentales, en Reims. En su '*Geometría*', él también señala que las rectas paralelas mantienen su distancia constante, es decir, son equidistantes. Él no sabía que afirmar esto era afirmar el '*Quinto Pos*tulado.

s. XII Omar Khayyam

El astrónomo-poeta estudió el problema de las paralelas en su obra '*La verdad de las paralelas y discusión sobre la famosa duda*'. En ella estudia cuadriláteros como el de la imagen y acaba razonando que "*la distancia entre rectas paralelas ni se expande ni se contrae, que es lo que en verdad los filósofos creen*".

s. XIII Nasir al-Din al-Tusi

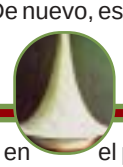
El astrónomo persa que trabajó para el nieto de Genghis Khan realizó una versión de los '*Elementos*'. En ella demuestra el *'Quinto Postulado'* diciendo que si un cuadrilátero tiene ángulos rectos en A y D, entonces si B es agudo, el ángulo C debe ser obtuso. Tampoco sabía que esto es equivalente al postulado que creía demostrar.

1663 John Wallis

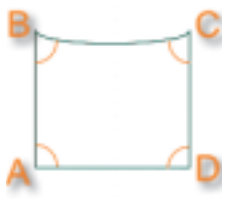
Profesor de la Universidad de Oxford, tradujo al latín los textos de Nasir al-Din. Dio una nueva interpretación del '*Quinto Postulado*' demostrando que dado un triángulo cualquiera siempre se puede construir otro con iguales ángulos y lados proporcionales. De nuevo, esto es equivalente al famoso postulado.

PORTADA DE *EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS*. SACCHERI, 1733

1697 Girolamo Saccheri



El jesuita Saccheri proporcionó un salto cualitativo en el problema de las paralelas. Supuso que el postulado era falso, esperando encontrar de esta suposición una contradicción. Enseguida vio que en un cuadrilátero como en la figura, los ángulos B y C no pueden ser obtusos. Supuso después que eran agudos y por mucho que se empeñó no encontró contradicción lógica alguna. Su convencimiento intuitivo de la verdad del postulado y lo erróneo de algunas conclusiones a las que llegaba, le hizo desecharlas. En realidad fue el primero en encontrarse con la Geometría No-Euclídea, pero el sentido común le hizo abandonarla.



1766 Johann Lambert

Escribió '*Die Theorie der Parallellinien*' en la que se preguntó si el '*Quinto Postulado*' se podía deducir de los restantes o si había que añadir nuevas hipótesis. Probó un resultado de Geometría No-Euclídea según la cual, si los ángulos de un triángulo miden menos de 180º, entonces, cuanto más crece el triángulo, menos miden sus ángulos.

1794 Adrien M. Legendre

Estudió incansablemente el problema de las paralelas desde 1794 hasta 1823. Llegó a resultados similares a los de Saccheri, pero como el texto de éste no era muy conocido, su libro '*Elements de geométrie*' le proporcionó un lugar en esta historia cuyo desenlace final te contaremos la semana próxima.

Infografía y textos: Lolita Brain - www.lolitabrain.com